УДК 532.59

КОНСТРУЮВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ

В.А.Кушнір, Г.А.Кушнір

Розглядається конструювання ірраціональних рівнянь засобами математичного моделювання.

Means of irrational equation constructing are being viewed by means of mathematic modeling.

Проблема створення тестових завдань з певними властивостями на сьогодні є досить актуальною. До таких проблем відноситься і конструювання ірраціональних нерівностей певного виду. Наведемо задачі.

Задача 1.

Розглянемо найбільш типові випадки конструювання ірраціональних рівнянь і нерівностей, зокрема рівнянь і нерівностей виду

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=mx+n, \tag{1}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}<mx+n, \tag{2}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}\le mx+n, \tag{3}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}>mx+n, \tag{4}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}\ge mx+n. \tag{5}$$

При цьому повинна для рівнянь і нерівностей (1) – (5) виконуватися умова: квадратне рівняння

$$(a-m^2)x^2+(b-2mn)x+(c-n^2)=0 \tag{6}$$

має два різні дійсні корені x_1 *і* x_2. Для визначеності будемо вважати, що $x_1<x_2$.

Для рівняння (1) дослідимо три випадки.

1) Рівняння (1) також має два розв'язки x_1 *і* x_2. Тоді математичною моделлю конструювання рівняння (1) з умовою (6) і **1)** буде система

$$\begin{cases}(a-m^2)x_1^2+(b-2mn)x_1+(c-n^2)=0\\(a-m^2)x_2^2+(b-2mn)x_2+(c-n^2)=0\\ax_1^2+bx_1+c\ge 0\\mx_1+n\ge 0\\ax_2^2+bx_2+c\ge 0\\mx_2+n\ge 0\end{cases}. \tag{7}$$

Перші два рівняння системи (7) означають, що дискримінант рівняння (6) $D > 0$. Нерівності системи (7) означають, що x_1 *і* x_2 входять у область визначення рівняння (1). З перших двох рівнянь системи (7) знаходимо

$$b = (m^2 - a)(x_2 + x_1) + 2mn, \tag{8}$$

$$c = ax_1x_2 - m^2x_1x_2 + n^2. \tag{9}$$

Дослідимо математичну модель (7). Для цього у вираз

$$ax_1^2 + bx_1 + c$$

замість ***a*** і ***b*** підставимо вирази (8) і (9). Після перетворень одержимо

$$ax_1^2 + bx_1 + c = (mx_1 + m)^2 \geq 0. \tag{10}$$

Аналогічно отримуємо

$$ax_2^2 + bx_2 + c = (mx_2 + m)^2 \geq 0. \tag{11}$$

Тоді математична модель (7) з урахуванням (8) – (11) можна записати така

$$\begin{cases} b = (m^2 - a)(x_2 + x_1) + 2mn \\ c = ax_1x_2 - m^2x_1x_2 + n^2 \\ mx_1 + n \geq 0 \\ mx_2 + n \geq 0 \end{cases}. \tag{12}$$

Зауважимо, що система рівнянь і нерівностей (7) еквівалентна системі (12).

Розв'язування моделі (12), тобто відшукання числових значень ***a, b, c, m, n, x_1, x_2*** таких, що задовольняли б систему (12), можна здійснити за таким алгоритмічним приписом.

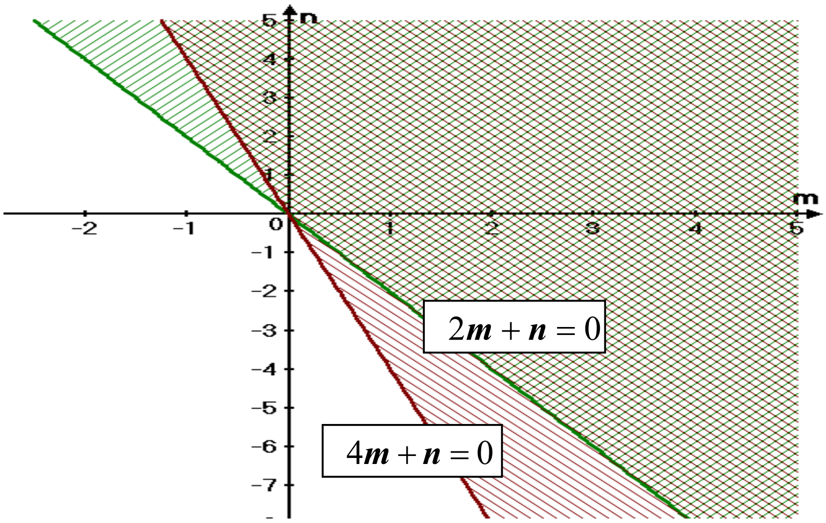
1) Вибираємо (чи генеруємо як випадкові числа програмою на комп'ютері) довільні дійсні числа $x_1 < x_2$ з певного проміжку, наприклад [-6; 6]. Наприклад, $x_1 = 2,\ x_2 = 4$.

2) Розв'язуємо з вибраними (чи згенерованими) значеннями x_1 *і* x_2 систему нерівностей

$$\begin{cases} mx_1 + n \geq 0 \\ mx_2 + n \geq 0 \end{cases} \tag{13}$$

відносно ***m*** і ***n.*** Для цього доцільно скористатися графічними можливостями Andvaced Grapher (AG) технологією. Можливі три випадки.

2.1) $x_1 < x_2,\ \ x_1 > 0,\ \ x_2 > 0$. Тоді система нерівностей при вибраних x_1 і x_2 буде мати таку геометричну картину (Побудови виконувалися в AG-технології).



Малюнок 1.

З *малюнка 1* видно, що розв'язок системи (10) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \ge -\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{m}, \ \boldsymbol{при} \ \boldsymbol{m} \ge 0 \\ \boldsymbol{n} \ge -\boldsymbol{x}_2 \boldsymbol{m}, \ \boldsymbol{при} \ \boldsymbol{m} < 0 \end{cases}. \quad (14)$$

Вибираємо (генеруємо) довільне значення $\boldsymbol{m}$, наприклад, $\boldsymbol{m} = 3$. Вибираємо (генеруємо) довільне $\boldsymbol{i} > 0$, наприклад, $\boldsymbol{i} = 1$. Тоді, виходячи з формули (14), можна записати $\boldsymbol{n} = -2\boldsymbol{m} + \boldsymbol{i} = -5$.

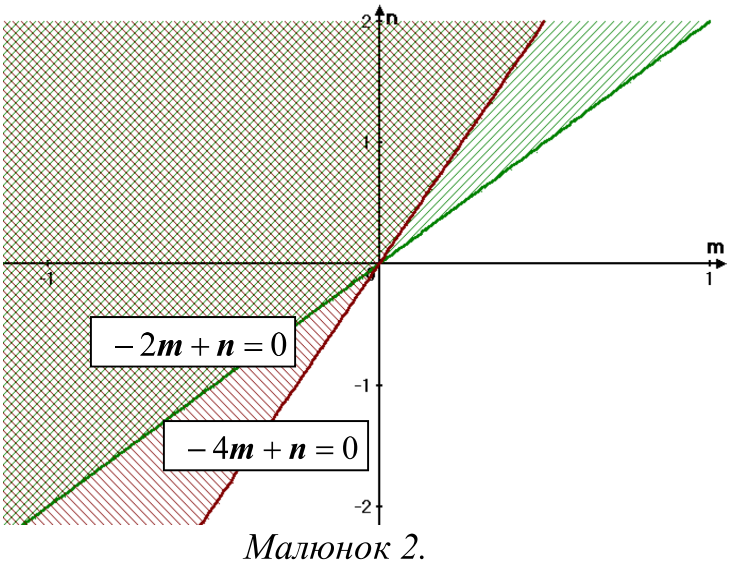
3) За формулами (8) і (9) визначаємо $\boldsymbol{b} = 30$, $\boldsymbol{c} = -55$.

4) Усі невідомі коефіцієнти шуканого рівняння (1) знайдені, рівняння побудоване:

$$\sqrt{-\boldsymbol{x}^2 + 30\boldsymbol{x} - 55} = 3\boldsymbol{x} - 5. \quad (15)$$

Легко переконатися, що $\boldsymbol{x}_1 = 2$, $\boldsymbol{x}_2 = 4$ будуть коренями рівняння (15).

2.2) Дослідимо розв'язок системи (13) у випадку, коли $\boldsymbol{x}_1 < 0$, $\boldsymbol{x}_2 < 0$, $\boldsymbol{x}_1 < \boldsymbol{x}_2$. Наприклад, $\boldsymbol{x}_1 = -4$, $\boldsymbol{x}_2 = -2$. Аналогічно пункту **2.1)** будуємо геометричну модель розв'язку системи (13).



Малюнок 2.

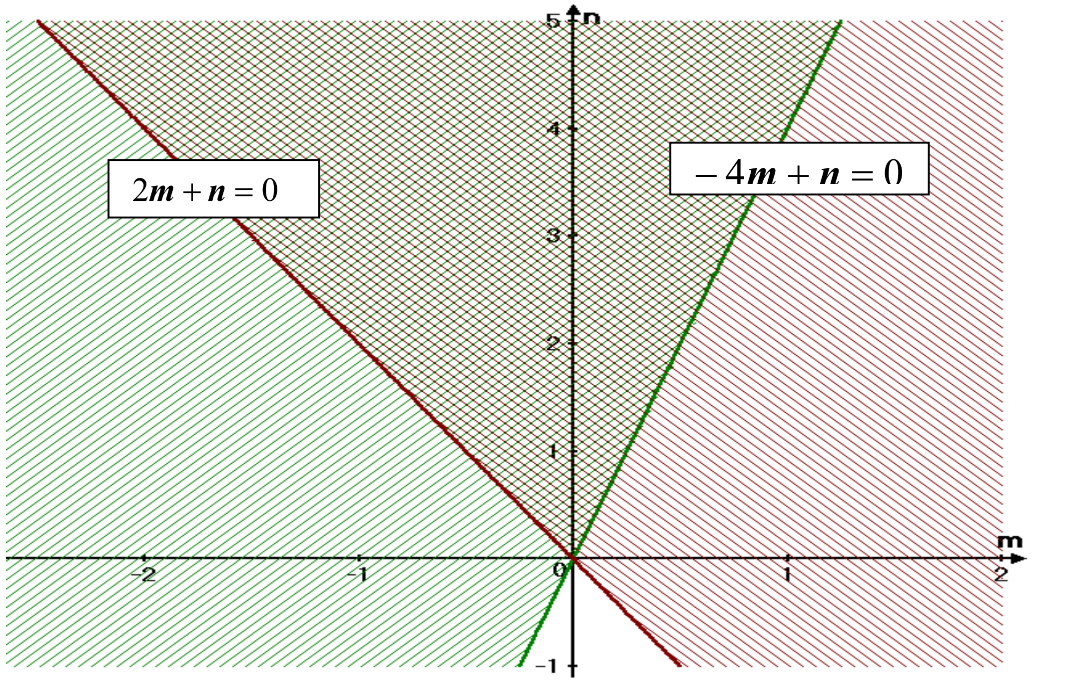
Згідно *малюнку 2* можна визначати значення $\boldsymbol{m}$ і $\boldsymbol{n}$ за формулою (13). Вибираємо (генеруємо) значення $\boldsymbol{m}$, наприклад, $\boldsymbol{m} = 3$. Вибираємо (генеруємо) довільне $\boldsymbol{i} > 0$, наприклад, $\boldsymbol{i} = 1$. Тоді, виходячи з формули (13), можна записати $\boldsymbol{n} = 4\boldsymbol{m} + \boldsymbol{i} = 13$.

5) За формулами (8) і (9) визначаємо $\boldsymbol{b} = 18,\ \boldsymbol{c} = 89$.

6) Усі невідомі коефіцієнти шуканого рівняння (1) знайдені, рівняння побудоване:

$$\sqrt{-\boldsymbol{x}^2 + 18\boldsymbol{x} - 89} = 3\boldsymbol{x} + 13. \tag{16}$$

2.3) У випадку, коли $\boldsymbol{x}_1 < 0,\ \boldsymbol{x}_2 > 0$, наприклад, $\boldsymbol{x}_1 = -4,\ \boldsymbol{x}_2 = 2$, процедура відшукання коефіцієнтів рівняння (1) подібна процедурам **2.1)** і **2.2).** Використаємо FG-технологію для зображення розв’язку системи (14) у вигляді графічної моделі.



Малюнок 3.

7) Згідно *малюнку 3* можна визначати значення $\boldsymbol{m}$ і $\boldsymbol{n}$ за формулою (14). Вибираємо (генеруємо) значення $\boldsymbol{m}$, наприклад, $\boldsymbol{m} = 3$. Вибираємо (генеруємо) довільне $\boldsymbol{i} > 0$, наприклад, $\boldsymbol{i} = 1$. Тоді, виходячи з формули (14), можна записати $\boldsymbol{n} = 4\boldsymbol{m} + \boldsymbol{i} = 13$. Вибираємо довільне значення ***a,*** наприклад, $\boldsymbol{a} = -1$.

5) За формулами (8) і (9) визначаємо $\boldsymbol{b} = 58,\ \boldsymbol{c} = 249$.

8) Усі невідомі коефіцієнти шуканого рівняння (1) знайдені, рівняння побудоване:

$$\sqrt{-\boldsymbol{x}^2 + 58\boldsymbol{x} + 249} = 3\boldsymbol{x} + 11.$$

Зауваження1. За наведеним алгоритмом можна конструювати нерівності (2)-(5). Наведемо алгоритм у більш компактному вигляді.

Алгоритм 1

побудови ірраціональних рівнянь і нерівностей виду (1) – (5) за умови, що квадратне рівняння (6) має два різні дійсні корені і вони обидва будуть розв'язками рівняння (1).

1. Генеруємо випадковим чиномдва довільні не рівні між собою дійсні числа із певного відрізка, наприклад, із [-6, 6].
2. x_1 присвоюємо значення меншого із них, x_2 – значення більшого.
3. Генеруємо випадковим чином із цього ж проміжку значення m.
4. Генеруємо випадковим чином значення $i > 0$ із проміжку [1, 6].
5. Обчислюємо значення n за формулою

$$\begin{cases} n \geq -x_1 m + i, \text{ при } m \geq 0 \\ n \geq -x_2 m + i, \text{ при } m < 0 \end{cases}.$$

6. Генеруємо випадковим чином значення $a \neq m^2$ із проміжку [-6, 6].
7. Обчислюємо b і c за формулами:

$$b = (m^2 - a)(x_2 + x_1) + 2mn,$$
$$c = ax_1x_2 - m^2x_1x_2 + n^2.$$

8. Рівняння чи нерівності (1) – (5) з наведеними вище властивостями побудовані.

Зауваження 2. Побудоване рівняння (1) можна розв'язувати різними способами і відповідно, за різними алгоритмами, "крайніми" виявленнями яких можуть бути:

1) Розв'язати рівняння (1) "формально", тобто, піднесенням обох частин до квадрату з наступним розв'язуванням квадратного рівняння (6) та перевіркою його коренів підстановкою в рівняння (1).
2) Процес розв'язування рівняння (1) будувати як послідовність моделей у вигляді системи рівнянь і нерівностей, кожна з наступних якої еквівалентна попередній. Тоді сторонніх коренів не виникне.

Нерівності ж (2) – (5) можна розв'язувати тільки способом 2).

Задача 2. Дещо змінимо задачу (1). А саме: побудувати ірраціональне рівняння (1) при умові, що квадратне рівняння (6) має два дійсні різні розв'язки, а ірраціональне рівняння (1) тільки один.

Повторюючи роздуми попередньої задачі 1, замість математичної моделі (12) отримаємо модель:

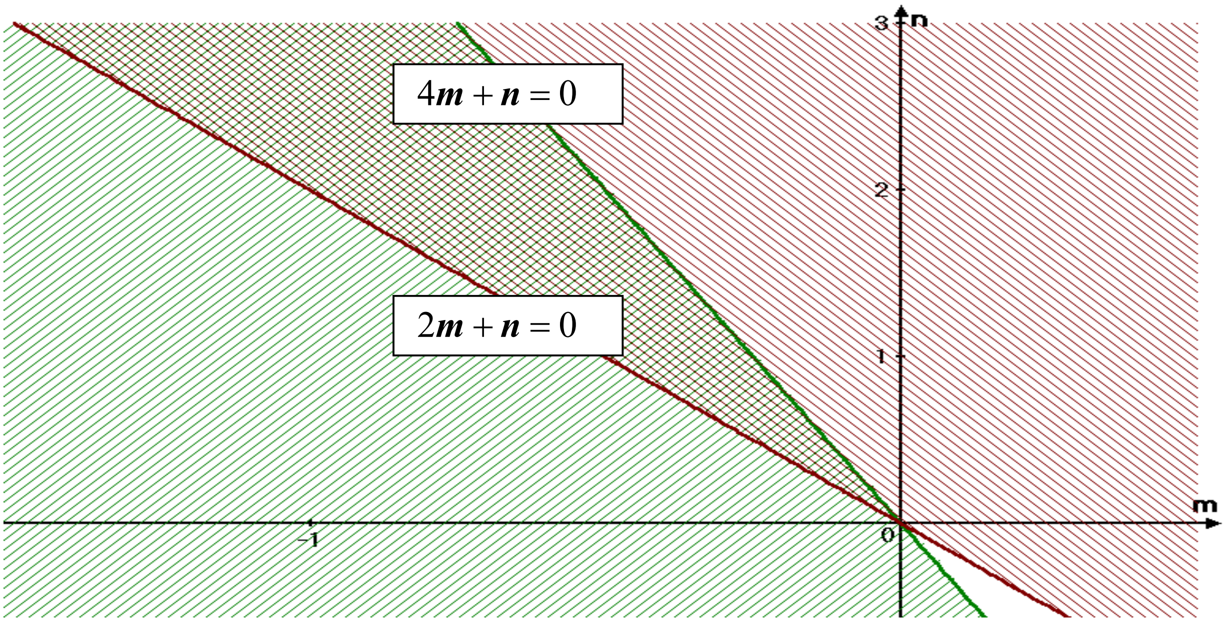
$$\begin{cases} b = (m^2 - a)(x_2 + x_1) + 2mn \\ c = ax_1x_2 - m^2x_1x_2 + n^2 \\ mx_1 + n < 0 \\ mx_2 + n \geq 0 \end{cases}. \tag{17}$$

А замість умови (13) нову умову

$$\begin{cases} \boldsymbol{m}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{n} \geq 0 \\ \boldsymbol{m}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{n} < 0 \end{cases}. \tag{18}$$

Зрозуміло, що корінь $\boldsymbol{x_2}$ квадратного рівняння (6) не буде задовольняти рівняння (1). У алгоритмі 1 зміниться вибір значення ***n*.**

Для прикладу візьмемо $\boldsymbol{x}_1 = 2,\ \boldsymbol{x}_2 = 4$. Геометричною моделлю розв’язку системи (18) буде



Малюнок 4.

З *малюнка 4* видно, що $\boldsymbol{m} \leq 0$, а

$$-2\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{n} \leq -4\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{m} \leq 0. \tag{19}$$

Виберемо, наприклад, $\boldsymbol{m} = -3$. Тоді, згідно (19) $6 \leq \boldsymbol{n} \leq 12$. Нехай $\boldsymbol{n} = 8$. Візьмемо $\boldsymbol{a} = -1$. За формулами (8) і (9) знаходимо: $\boldsymbol{b} = 12,\ \boldsymbol{c} = -16$. Потрібне рівняння побудоване і має вигляд

$$\sqrt{-\boldsymbol{x}^2 + 12\boldsymbol{x} - 16} = -3\boldsymbol{x} + 8. \tag{20}$$

Задача 3. Сконструювати ірраціональне рівняння виду (1) при умові, що рівняння (6) має два різні дійсні корені і жоден з них не буде коренем рівняння (1).

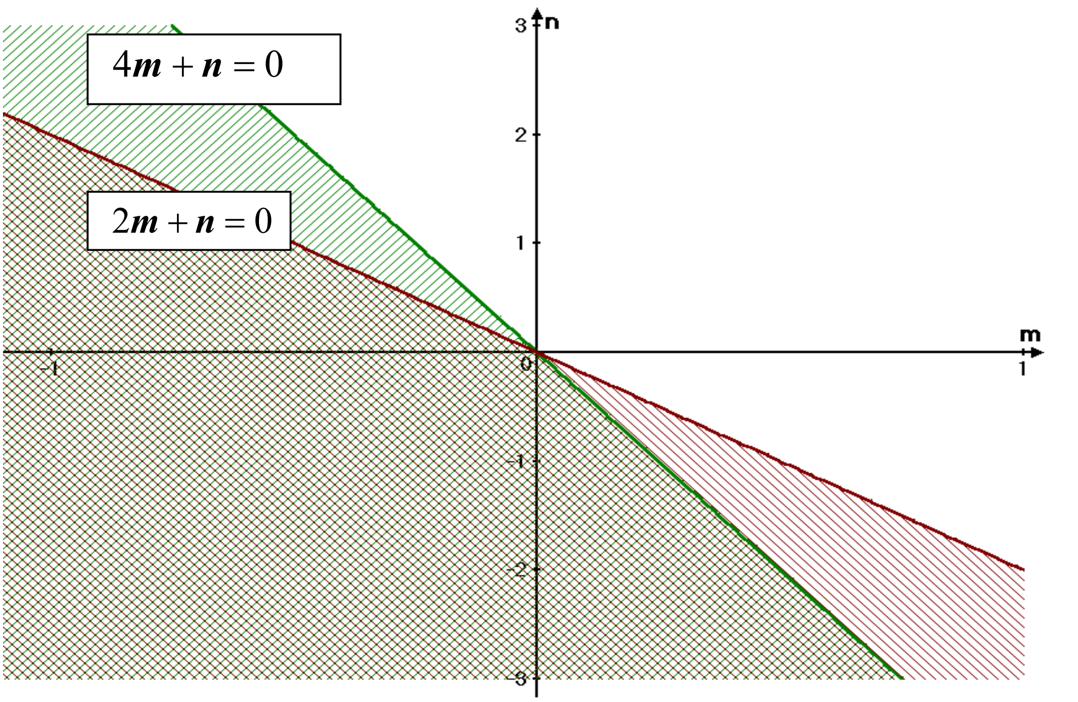
Математичною моделлю такої задачі буде

$$\begin{cases} \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{m}^2 - \boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_1) + 2\boldsymbol{m}\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{m}^2\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{n}^2 \\ \boldsymbol{m}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{n} < 0 \\ \boldsymbol{m}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{n} < 0 \end{cases}. \tag{21}$$

Розв’язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \boldsymbol{m}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{n} < 0 \\ \boldsymbol{m}\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{n} < 0 \end{cases}. \tag{22}$$

Нехай $x_1 = 2,\ x_2 = 4$. Тоді геометричною моделлю розв'язку системи (22) буде



Малюнок 5.

Виходячи з <u>*малюнка 5*</u>, робимо висновок, що

$$\begin{cases} n \le -2m, \ \textbf{при}\ m \le 0 \\ n \le -4m, \ \textbf{при}\ m > 0 \end{cases}. \tag{23}$$

Нехай $m = -2$. Тоді $n \le 4 \Rightarrow n = 3$. $a = -1$. За формулами (8) і (9) знаходимо $b = 18,\ c = -31$. Шукане рівняння набуде вигляду

$$\sqrt{-x^2 + 18x - 31} = -2x + 3. \tag{24}$$

Зауваження 3. Щодо нерівностей виду (2) – (5) то можна ставити задачу конструювання таких нерівностей при умові, що рівняння (6) має два корені. Однак чи матимуть такі нерівності розв'язки, чи ні алгоритм 1 наперед відповідь не дає.

Зауваження 4. За запропонованою авторами технологією можна конструювати ірраціональні рівняння та нерівності інших, відмінних від (1) – (6) видів, дробово-раціональні, логарифмічні рівняння та нерівності тощо.

Висновки.

1. Задачі "зворотного мислення" є творчими задачами оскільки вони мають не один можливий спосіб розв'язування.
2. Задачі конструювання математичних об'єктів з певними властивостями є ще однією важливою позицією у розв'язуванні проблем навчання, зокрема – навчання розв'язування ірраціональних рівнянь.
3. Наведені алгоритми досить просто програмуються на алгоритмічних мовах, що дозволить вчителю створити достатню кількість варіантів однотипних завдань.